

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2, k) &= \text{Ci}(|(r_1 - r_2)(k_F - k)|) - \text{Ci}(|(r_1 - r_2)(k_F - k)|), \\ f_2(r_1, r_2, k) &= \text{Si}((r_1 - r_2)(k_F - k)) - \text{Si}((r_1 - r_2)(k + k_F)). \end{aligned} \quad (\text{A 4 a, b})$$

Man kann nach einigen Umformungen das richtige asymptotische Verhalten nachweisen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(F(r) + \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{k_0} \cos k_0 r \right) = 0. \quad (\text{A 5})$$

Zum normalen Skin-Effekt unter Berücksichtigung der magnetischen Widerstandsänderung

Von RUDOLF KLEIN *

Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Braunschweig

(Z. Naturforsch. 19 a, 1273—1276 [1964]; eingegangen am 26. Juni 1964)

The penetration of a magnetic field into an infinite metallic half-space is altered due to the presence of the magnetoresistance of the medium. MAXWELL's equations modified by the magnetic field dependence of the conductivity are solved for the case where the field at the surface is switched on immediately and is constant afterwards. It is shown that due to magnetoresistance the field runs into the medium quicker compared to the case of the pure normal skin effect. The induced eddy current has its maximum value no longer at the surface of the specimen. The results are discussed in connection with pulse methods for the measurement of magnetoresistance in high fields.

Zur Messung der magnetischen Widerstandsänderung in starken Feldern verwendet man Impulsmethoden¹. An der Probenoberfläche liegt ein zeitlich veränderliches Feld, das in die Probe eindringt und dort orts- und zeitabhängig ist. Die Formeln des reinen Skin-Effekts aus der MAXWELLSchen Theorie sind nicht anwendbar, da die spezifische Leitfähigkeit σ eine Funktion des Magnetfeldes ist, dessen genaues Verhalten gerade durch das Vorhandensein der zu messenden magnetischen Widerstandsänderung gegenüber dem Fall des reinen Skin-Effekts modifiziert wird.

Bei der Durchführung der Experimente interessiert in diesem Zusammenhang die Wirbelstromaufheizung und die Zeit, die das Magnetfeld benötigt, um über dem Probenquerschnitt praktisch konstant zu sein. Wir wollen an einem vereinfachten mathematischen Modell zeigen, daß gerade auf Grund der Existenz einer magnetischen Widerstandsänderung das Magnetfeld schneller in die Probe eindringt. Ferner wird gezeigt, daß das Maximum des durch das Magnetfeld induzierten Stromes immer im Innern der Probe liegt.

* Jetzt: Laboratories RCA Ltd., Zürich, Schweiz.

¹ P. KAPITZA, Proc. Roy. Soc., Lond. A 123, 292 [1929]. — B. LÜTHI, Helv. Phys. Acta 33, 161 [1960].

Zur Lösung dieses Problems ist das gekoppelte System aus MAXWELLSchen Gleichungen und BOLTZMANN-Gleichung zu lösen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{\hbar} \left\{ \mathbf{F} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right\} \cdot \operatorname{grad} \kappa f \\ + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}_r f = -\frac{f - f_0}{\tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dazu kommt der Ausdruck für die Stromdichte

$$\mathbf{J} = \frac{e}{4\pi^3} \int \mathbf{v} f d\mathbf{k}. \quad (3)$$

Da die bei den Experimenten verwendeten Frequenzen sehr klein sind gegenüber der reziproken Relaxationszeit der Elektronen ($1/\tau$), kann man in der BOLTZMANN-Gleichung (2) das Glied $\partial f / \partial t$ vernachlässigen. Ferner spielt die explizite Ortsabhängigkeit der Verteilungsfunktion f nur eine untergeordnete Rolle, da sich auf der mittleren freien Weglänge $l = \tau v_0$ die Feldstärken nicht stark ändern. Daher ist das Glied $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}_r f$ als eine kleine Korrektur anzusehen, und man darf mit einem lokalen OHMSchen Gesetz $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{H}) \mathbf{F}$ rechnen. Die Leitfähigkeit ist also als eine bekannte Funktion von \mathbf{H} anzusehen, wie sie etwa auch bei einem ortsunabhängigen Problem vorliegt. Nicht bekannt ist jedoch die



Abhängigkeit des Magnetfeldes als Funktion vom Abstand von der Oberfläche, und damit die Ortsabhängigkeit der Leitfähigkeit.

Aus mathematischen Gründen untersuchen wir das folgende System: An der Oberfläche des unendlichen metallischen Halbraums $y > 0$ wird zur Zeit $t = 0$ in z -Richtung das Magnetfeld $H = H_0$ eingeschaltet. Für diese Geometrie folgt aus (1)

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} \sigma(H) F_x; \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4)$$

Betrachten wir zunächst den Fall des „reinen“ Skin-Effekts (keine magnetische Widerstandsänderung). Aus (4) folgt

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{4\pi \sigma_0}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5)$$

mit den Randbedingungen $H = H_0$ bei $y = 0$ und $t > 0$, $H = 0$ bei $y = \infty$ und der Anfangsbedingung $H = 0$ für $y > 0$ und $t = 0$. Die bekannte Lösung² dieses Problems ist

$$H(y, t) = H_0 \left\{ 1 - \operatorname{Erf} \left(\frac{1}{2} \frac{y}{c} \sqrt{4\pi \sigma_0} \frac{y}{\sqrt{t}} \right) \right\} \quad (6)$$

$$\text{mit } \operatorname{Erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp \{-v^2\} dv.$$

Den induzierten Strom findet man aus der ersten Gleichung (4) zu

$$J_x = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial y} = -H_0 \frac{\sqrt{\sigma_0}}{2\pi \sqrt{t}} \exp \left(-\frac{\pi \sigma_0}{c^2} \frac{y^2}{t} \right). \quad (7)$$

Diese Funktion hat für alle t ihr Maximum am Rand $y = 0$.

Im Falle $\sigma = \sigma(H)$, wobei H als Funktion von y noch zu bestimmen ist, findet man aus den Gln. (4) mit Hilfe der BOLTZMANNSchen Transformation

$$\eta = y/(2\sqrt{t}) \quad (8)$$

die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{\sigma(H)} \frac{dH}{d\eta} \right) = -\frac{8\pi}{c^2} \eta \frac{dH}{d\eta}. \quad (9)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung ist unter den gemachten Voraussetzungen exakt. Die Anwendung der BOLTZMANNSchen Transformation (8) auf die partiellen Dgln. (4) ist nur möglich, wenn sich auch die Anfangs- und Randbedingungen auf η allein transformieren lassen. Das ist der Grund für die Wahl des hier behandelten Modells für die experimentelle Situation.

² Siehe z. B. J. CRANK, The Mathematics of Diffusion, At the Clarendon Press, Oxford 1956.

Das qualitative Verhalten von $H(\eta) = H(y, t)$ läßt sich an Hand dieser Gleichung diskutieren. Wir wollen jedoch zunächst für $\sigma(H)$ ein Verhalten annehmen, das der quadratischen Widerstandsänderung entspricht:

$$\sigma(H) = 1/(\varrho_0 + b H^2), \quad (10)$$

wobei $\varrho_0 = 1/\sigma_0$ der Widerstand bei $H = 0$ ist. Dem entspricht

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} = \frac{A\varrho}{\varrho_0} = \frac{b}{\varrho_0} H^2. \quad (10 \text{ a})$$

Mit $H(\eta) = H_0 h(\eta)$ folgt dann aus (9)

$$(\varrho_0 + b H_0^2 h^2) h'' + 2b H_0^2 h h'^2 + \frac{8\pi}{c^2} \eta h' = 0, \\ h(0) = 1; \quad h(\infty) = 0. \quad (11)$$

Aus (7) und (8) folgt, daß der Strom, der durch das örtlich und zeitlich veränderliche Magnetfeld hervorgerufen wird, zu einer festen Zeit $t > 0$ nach dem Einschalten der Ableitung der gesuchten Funktion $h(\eta)$ in (11) proportional ist:

$$J_x = \frac{c H_0}{8\pi \sqrt{t}} \frac{dh}{d\eta}. \quad (12)$$

Wir wollen zeigen, daß im Gegensatz zum Fall des reinen Skin-Effekts ($b = 0$) der Maximalwert dieses Stroms stets im Innern ($y > 0$) liegt. Sind y_1, y_2 zwei beliebige Abstände von der Oberfläche mit $y_1 > y_2$, so ist zu einer beliebigen, aber festen Zeit $t > 0$ nach (8) auch $\eta_1 > \eta_2$. In jedem Punkt des Intervalls $0 < \eta < \infty$ soll das Magnetfeld größer sein als in jedem weiter vom Rand entfernten Punkt: $h(\eta_1) < h(\eta_2)$. Wir nehmen also an, daß das Magnetfeld monoton vom Rand her abfällt. Daraus folgt $h'(\eta) < 0$ für $0 < \eta < \infty$. Damit der Strom seinen Maximalwert im Innern hat, muß man nach (12) zeigen, daß $h'(\eta)$ in diesem Intervall einen Extremwert hat, daß es also ein $\eta = \eta_0$ gibt mit $h''(\eta_0) = 0$. In einem solchen Punkt η_0 folgt aus Gl. (11)

$$2b H_0^2 h(\eta_0) h'^2(\eta_0) + \frac{8\pi}{c^2} \eta_0 h'(\eta_0) = 0,$$

da der Faktor von h'' positiv ist. Führt man die positiven Konstanten $C_1 = 2b H_0^2$, $C_2 = 8\pi/c^2$ ein, so hat man zu zeigen, daß [es ist $h'(\eta_0) \neq 0$]

$$C_1 h(\eta_0) h'(\eta_0) + C_2 \eta_0 h'(\eta_0) = 0$$

erfüllbar ist. Wegen $h(\eta) > 0$, $h'(\eta) < 0$ ist der erste Summand negativ, der zweite stets positiv. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = C_1 h(x) h'(x) + C_2 x$$

und fragen, ob es Stellen $x = \eta_0$ gibt, bei denen $f(\eta_0) = 0$. Das ist aber offenbar der Fall, denn bei $x = 0$ fällt das zweite Glied rechts weg, und es ist $f(x) < 0$ für kleine x . Bei großen x ist aber $f(x) > 0$, denn das zweite Glied wächst unbeschränkt, während das erste beschränkt negativ bleibt. Damit existiert mindestens eine Nullstelle der Funktion $f(x)$. Wenn es deren mehrere gibt, muß ihre Anzahl immer ungerade sein, woraus folgt, daß das erste Extremum von $h'(\eta)$ ein Minimum sein muß. Endlich viele Extrema wären physikalisch nicht erklärbar, während unendlich viele aus mathematischen Gründen auszuschließen sind.

Dieses Ergebnis, nach dem bei Vorhandensein einer magnetischen Widerstandsänderung das Strommaximum stets im Innern liegt, hängt nicht von der speziellen Form (10) der Funktion $\sigma(H)$ ab. Als einzige Voraussetzung ist nötig, daß $\sigma(H)$ eine monoton fallende Funktion ist, daß also mit zunehmendem Magnetfeld die Leitfähigkeit abnimmt.

Der Grund für dieses andersgeartete Verhalten des Stroms folgt aus dem Zusammentreffen zweier entgegengesetzter Effekte. Der vom Magnetfeld induzierte Strom ist dort am stärksten, wo die Änderung des Magnetfeldes am stärksten ist, was beim reinen Skin-Effekt an der Oberfläche stattfindet. Andererseits ist die Leitfähigkeit dort am schlechtesten, wo das Magnetfeld am stärksten ist.

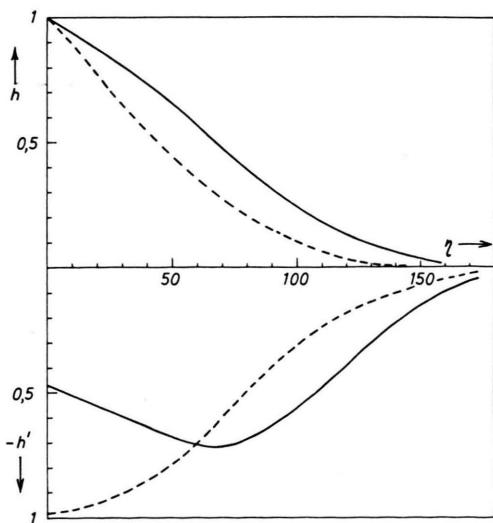


Abb. 1. Numerische Lösung der Gl. (11) für $b=0$ (---) und $\Delta\varrho/\varrho_0=2$ (—). Nach unten aufgetragen ist die Ableitung $-h'$, die nach Gl. (12) mit der Stromdichte zusammenhängt.

Die Dgl. (11) für $h(\eta)$ wurde für verschiedene Werte der in (10) enthaltenen Konstanten gelöst (Abb. 1). Man findet, daß das Magnetfeld H zu einem festen Zeitpunkt nach dem Einschalten in einer festen Entfernung vom Rand mit der Stärke der magnetischen Widerstandsänderung b zunimmt.

Wählt man etwa $\varrho_0 = 10^{-4} \Omega\text{cm}$ und nimmt für die magnetische Widerstandsänderung $\Delta\varrho/\varrho_0 = 2$ an, so kann man fragen, bis zu welchem Abstand von der Oberfläche z. B. 0,01 sec nach dem Einschalten 90% des Randwertes vorhanden sind. Der reine Skin-Effekt ($b = 0$) liefert 1,9 cm, während man bei obigem Zahlenbeispiel 3,4 cm abliest. Das Feld ist also bei Vorhandensein einer magnetischen Widerstandsänderung weiter eingedrungen. Wählt man einen festen Abstand y_0 von der Oberfläche und fragt nach den Zeiten, die notwendig sind, damit bei y_0 z. B. $0,9 H_0$ herrscht, so findet man, daß diese Zeiten mit zunehmender Widerstandsänderung abnehmen. Das Magnetfeld dringt also schneller in die Probe ein.

Für den induzierten Wirbelstrom erhält man mit Hilfe von (12) Informationen aus $h'(\eta)$: Mit wachsender Widerstandsänderung wird der Randwert $J_x(0, t)$ bei festgehaltener Zeit $t > 0$ immer kleiner und die Maxima liegen an Stellen $\eta > 0$, wobei η mit b wächst. Die Größe der Extrema nimmt jedoch mit wachsendem b ab. Die Stromverteilung wird über ein größeres Gebiet an der Oberfläche verschmiert. Für den Gesamtstrom findet man

$$I(t) = \int_0^\infty J_x(y, t) dy = \frac{c H_0}{4 \pi} \int_0^\infty \frac{dh}{d\eta} d\eta = - \frac{c H_0}{4 \pi} \quad (13)$$

unabhängig von der magnetischen Widerstandsänderung.

Schließlich kann man noch den Widerstand betrachten, den ein in y -Richtung unendlicher Quader besitzt, der in x - und z -Richtung die Abmessungen 1 cm hat. Dieser Widerstand ergibt sich aus

$$R I^2 = \left\langle \int_0^\infty F_x(y, t) J_x(y, t) dy \right\rangle, \quad (14)$$

wobei $\langle \dots \rangle$ eine zeitliche Mitteilung bedeutet über eine Zeitspanne, die in der Größenordnung der Meßdauer für den Widerstand liegt. Aus den MAXWELLSchen Gleichungen findet man für das innere Integral in (14)

$$\int_0^\infty F_x J_x dy = \frac{H_0^2}{4 \pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^\infty [h(y, t) - \frac{1}{2} h^2(y, t)] dy \right\}. \quad (15)$$

Führt man die zeitliche Mitteilung über $0 \leq t \leq \tau$ aus, so wird

$$\begin{aligned} RI^2 &\equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \left\{ \int_0^\infty F_x J_x dy \right\} \\ &= \frac{H_0^2}{4\pi} \frac{1}{\tau} \int_0^\infty [h(y, \tau) - \frac{1}{2} h^2(y, \tau)] dy. \quad (16) \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit h_r das reduzierte Magnetfeld beim reinen Skin-Effekt, so war $h(y, \tau) > h_r(y, \tau)$. Dann gilt für den Integranden in (16)

$$h_r - \frac{1}{2} h_r^2 < h - \frac{1}{2} h^2.$$

Da ferner $h(y, \tau) - \frac{1}{2} h^2(y, \tau) > 0$ für $0 < y < \infty$, wächst der Widerstand mit zunehmendem b . Setzt man eine der numerisch bestimmten Lösungen $h(y, \tau)$

in (16) ein, so ist damit die Möglichkeit gegeben, numerisch R zu errechnen.

Die hier erhaltenen Ergebnisse wurden mit Hilfe eines vereinfachten Modells gewonnen: Annahme des unendlichen Halbraums und sprunghafte Einschalten des Magnetfeldes. Die bei den Experimenten vorliegende endliche Anstiegszeit des Magnetfeldes wird zwar die angegebenen numerischen Ergebnisse ändern, die vorhandene magnetische Widerstandsänderung modifiziert jedoch in jedem Falle den Skin-Effekt dahingehend, daß das Magnetfeld schneller in die Probe eindringt als es die MAXWELLSCHE Theorie vorhersagt.

Den Herren Professoren M. KOHLER und G. LAUTZ danke ich für wertvolle Diskussionen und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung.

Die Beweglichkeit der langsamen und schnellen Löcher in Indiumantimonid*

Von H. SCHÖNWALD

Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen
(Z. Naturforsch. 19 a, 1276—1296 [1964]; eingegangen am 28. Februar 1964)

Die vorliegende Arbeit berichtet über Messungen von Leitfähigkeit und HALL-Koeffizient als Funktion der magnetischen Induktion B an verschiedenen dotierten InSb-Einkristallen bei hohen und tiefen Temperaturen. Aus der Widerstandsänderung im Magnetfeld von eigenleitendem Material kann die Beweglichkeit der Löcher für einen weiten Temperaturbereich berechnet werden. Das Anwachsen der Beweglichkeit mit zunehmender Temperatur oberhalb von 150°C zeigt, daß das bisherigen Rechnungen zugrunde gelegte Zweibandmodell für eigenleitendes InSb in diesem Temperaturbereich nicht verwendet werden kann. Deshalb wird untersucht, wie sich HALL-Koeffizient und Widerstandsänderung verhalten, wenn das Valenzband durch zwei Teilbänder mit verschiedenen Beweglichkeiten ersetzt wird.

Die gemessenen Werte können zwangsläufig durch gerechnete Kurven angeglichen werden, wenn zwischen 22°C und 492°C für die Beweglichkeit der schnellen Löcher Werte zwischen $3 \cdot 10^4 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$ und $9,5 \cdot 10^3 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$ und für das Konzentrationsverhältnis der schnellen und langsamen Löcher Werte zwischen 90 und 33 angenommen werden.

Bei der Temperatur 77°K werden elektrische Leitfähigkeit und HALL-Koeffizient von p-dotiertem InSb als Funktion der magnetischen Induktion und von einseitigem Druck und Zug untersucht. Unter dem Einfluß von Druck wird die elektrische Leitfähigkeit größer, die Widerstandsänderung im Magnetfeld kleiner, während der HALL-Koeffizient unverändert bleibt. Unter dem Einfluß von Zug sind die Effekte entgegengesetzt.

Ebenso wie bei hohen Temperaturen können die Meßpunkte durch gerechnete Kurven wieder gegeben werden, wenn für die HALL-Koeffizienten und Leitfähigkeiten der Teilbänder geeignete Werte angenommen werden. Diese Werte zeigen, daß durch einseitigen Druck oder Zug die Teilbänder gegeneinander verschoben werden und daß die Beweglichkeit der langsamen Löcher durch Druck größer und durch Zug kleiner wird.

Der am meisten untersuchte Verbindungshalbleiter der $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ -Klasse ist Indiumantimonid. Die Verbindung zeichnet sich durch eine große Elektronenbeweglichkeit und die daraus folgenden ausgeprägten galvanomagnetischen Eigenschaften aus.

Über Messungen von Leitfähigkeit und HALL-Koeffizienten bei verschiedenen Temperaturen wurde zuerst im Jahre 1953 von WEISS¹ berichtet. Seit dieser Zeit ist eine Anzahl von Arbeiten zu diesem Thema erschienen. Es sei hier nur auf Berichte von

* Dissertation, Universität München 1964.

¹ H. WEISS, Z. Naturforsch. 8 a, 463 [1953].